Matemáticas 1 - Revisión Parcial 1.

Resolución 1^{er} Parcial - MA1111

1. $\left[5 \text{ puntos}\right]$ Halle el conjunto solución de $2\left|2x-3\right| \leq \left|x+10\right|$.

Solución : Es conocido que

$$\left|(\cdot)\right|^2 = \left(\cdot\right)^2,$$

además, elevar al cuadrado mantiene desigualdades si los términos son positivos como es el caso de la expresión valor absoluto, así,

$$2\left|2x-3\right| \leq \left|x+10\right| \iff \left|4x-6\right| \leq \left|x+10\right|$$

$$\iff \left|4x-6\right|^2 \leq \left|x+10\right|^2 \iff \left(4x-6\right)^2 \leq \left(x+10\right)^2,$$

resolvemos esta última desigualdad

$$\begin{aligned} \left(4x-6\right)^2 \leq \left(x+10\right)^2 &\iff \left(4x-6\right)^2 - \left(x+10\right)^2 \leq 0 \\ &\iff \Big(\left(4x-6\right) - \left(x+10\right)\Big)\Big(\left(4x-6\right) + \left(x+10\right)\Big) \leq 0 \\ &\iff \left(3x-16\right)\left(5x+4\right) \leq 0. \end{aligned}$$

Así, resolver la inecuación

$$2\left|2x-3\right| \leq \left|x+10\right| \qquad \text{es equivalente a resolver} \qquad \left(3x-16\right)\left(5x+4\right) \leq 0.$$

Por lo tanto, buscamos los números reales, x, que hacen que la expresión sea negativa o igual a cero.

Buscamos los **puntos extremos** de la expresión, para ello igualamos a cero

$$\left(3x-16\right)\left(5x+4\right) = 0 \implies \begin{cases} 3x-16=0 \implies \boldsymbol{x = \dfrac{16}{3}}. \\ 5x+4=0 \implies \boldsymbol{x = -\dfrac{4}{5}}. \end{cases}$$

Estudiamos el signo de $\left(3x-16\right)\left(5x+4\right)$. (Recuerde, buscamos los valores donde la expresión es negativa o igual a cero)

	$-\infty$ a $-\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5}$ a $\frac{16}{3}$	$\frac{16}{3}$ a $+\infty$
$3x-16$	$-$	$-$	$+$
$5x+4$	$-$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$

Luego, la solución de la inecuación es $x \in \left[-\frac{4}{5}, \frac{16}{3}\right]$. ★

2. $\left[\text{TOTAL 10 puntos}\right]$ ***(a)*** $\left[\text{5 puntos}\right]$ Considere los puntos $A\,(0,4)$ y $B\,(-5,1)$. Sabiendo que el segmento $\overline{AB}$ es perpendicular a $\overline{AC}$, encuentre el punto en el que $\overline{AC}$ corta al eje x.

Solución : Puesto que, $\overline{AB}$ es perpendicular a $\overline{AC}$, entonces las rectas que se obtiene de dichos segmentos son perpendicular, así,

$$m_{\overline{AB}} \cdot m_{\overline{AC}} = -1,$$

donde $m_{\overline{AB}}$ y $m_{\overline{AC}}$ son las pendientes de las rectas que se generan de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente.

Además dichas rectas tienen el punto $A\,(0,4)$ como punto común.

Calculamos la pendiente de la recta que pasa por los puntos A y B

$$m_{\overline{AB}} = \frac{4-1}{0-\left(-5\right)} = \frac{3}{5},$$

de aquí,

$$\frac{3}{5} \cdot m_{\overline{AC}} = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad m_{\overline{AC}} = -\frac{5}{3}.$$

Como la recta que se genera del segmento $\overline{AC}$ pasa por el punto $A\,(0,4)$, entonces la ecuación de dicha recta viene dada por

$$L: y-4 = -\frac{5}{3}\left(x-0\right) \qquad \Longrightarrow \qquad L: y = -\frac{5}{3}x+4.$$

Para obtener el punto en el que $\overline{AC}$ cruza el eje x, hacemos $y=0$ en la ecuación de la recta L

$$\left(0\right) = -\frac{5}{3}x+4 \quad \Longrightarrow \quad \frac{5}{3}x = 4 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{12}{5}.$$

Luego, el punto en el que $\overline{AC}$ cruza el eje x es $\frac{12}{5}$. ★

(b) $\left[\text{5 puntos}\right]$ Hallar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2+y^2+2x-2y-39=0$ en el punto $(4,5)$.

Solución : En primer lugar, veamos si el punto $P\,(4,5)$ pertenece a la circunferencia, para ello sustituimos en la ecuación de la misma

$$\left(4\right)^2+\left(5\right)^2+2\left(4\right)-2\left(5\right)-39 = 16+25+8-10-39 = 39-39 = 0,$$

como cumple con la ecuación de la circunferencia, entonces P es punto de tangencia.

Así, la recta que pasa por el centro de la circunferencia y el punto de tangencia es perpendicular a la recta buscada, calculamos la pendiente de la recta radial.

Buscamos el centro de la circunferencia, para ello, completamos cuadrados en la variable x y en la variable y.

$$x^2+2x=\left(x+1\right)^2-1,$$

mientras que,

$$y^2-2y=\left(y-1\right)^2-1.$$

Luego,

$$x^2+y^2+2x-2y-39=0 \qquad \Longrightarrow \qquad \left(x+1\right)^2-1+\left(y-1\right)^2-1-39=0$$

$$\Longrightarrow \qquad \left(x+1\right)^2+\left(y-1\right)^2=41,$$

así, el centro de la circunferencia es $C\left(-1,1\right)$, por lo tanto la pendiente de la recta radial, la cual vamos a denotar por $m_{\overline{PC}}$, viene dada por

$$m_{\overline{PC}}=\frac{5-1}{4-\left(-1\right)}=\frac{4}{5},$$

con lo que, la pendiente de la recta tangente, la cual denotamos por, $m_{\tan}$, debe cumplir con

$$m_{\overline{PC}}\cdot m_{\tan}=-1 \qquad \Longrightarrow \qquad m_{\tan}=-\frac{1}{m_{\overline{PC}}},$$

se tiene que

$$m_{\tan}=-\frac{1}{\frac{4}{5}} \qquad \Longrightarrow \qquad m_{\tan}=-\frac{5}{4}.$$

La ecuación punto-pendiente de la recta tangente buscada es

$$y-5=-\frac{5}{4}\left(x-4\right),$$

y la ecuación general es

$$5x+4y-40=0.$$

★

3. $\left[5 \text{ puntos}\right]$ Hallar el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{-x\left(x-1\right)^2\left|x-3\right|} + \arccos\left(\frac{x-3}{x^2+1}\right) + \arctan\left(x^5 - \sqrt[5]{x+1}\right).$$

Solución : La función f tiene sentido si y sólo si el argumento de la raíz cuadrada es mayor o igual a cero,

$$\textbf{Condición } 1 \quad \left(\text{Para } \sqrt{(\cdot)}\right) \quad : \quad -x\left(x-1\right)^2\left|x-3\right| \geq 0,$$

por otra parte, en cuanto al arcocoseno, se debe cumplir

$$\textbf{Condición } 2 \quad \left(\text{Para } \arccos(\cdot)\right) \quad : \quad \left|\frac{x-3}{x^2+1}\right| \leq 1$$

y, por último, cuando el denominador del cociente sea diferente de cero, es decir,

$$\textbf{Condición } 3 \quad \left(\text{Para } \frac{1}{(\cdot)}\right) \quad : \quad x^2+1 \neq 0.$$

Resolvemos cada condición.

(a) **Condición 1** : Es conocido que el producto de dos términos es mayor a cero, cuando los términos tienen el mismo signo y es igual a cero cuando uno, al menos uno, de los términos es igual a cero, así,

$$-x\left(x-1\right)^2\left|x-3\right| > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -x, \ \left(x-1\right)^2\left|x-3\right| \quad \text{tienen el mismo signo}$$

y

$$-x\left(x-1\right)^2\left|x-3\right| = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -x = 0 \quad \text{ó} \quad \left(x-1\right)^2 = 0 \quad \text{ó} \quad \left|x-3\right| = 0.$$

Comenzamos con el caso que sea positivo. Observemos que la expresión $\left(x-1\right)^2\left|x-3\right|$ es mayor que cero, por ser el producto de dos términos positivos, así, la inecuación

$$-x\left(x-1\right)^2\left|x-3\right| > 0,$$

solo se cumplirá cuando

$$-x > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x < 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \left(-\infty, 0\right).$$

Estudiemos el caso de la igualdad a cero. Resolviendo cada igualdad que se desprenden de este caso, obtenemos

- $-x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0.$
- $\left(x-1\right)^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x-1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 1.$

- $\left|x-3\right|=0 \iff x-3=0 \iff x=3.$

Luego, la solución de la inecuación es

$$\text{sol}_1 \; : \; x\in\left(-\infty,0\right)\bigcup\left\{0,1,3\right\} \qquad \iff \qquad \text{sol}_1 \; : \; x\in\left(-\infty,0\right]\bigcup\left\{1,3\right\}.$$

(b) **Condición 2** : Tenemos que

$$\left|\frac{x-3}{x^2+1}\right|\leq 1 \qquad \iff \qquad -1\leq\frac{x-3}{x^2+1}\leq 1.$$

Para obtener la solución de esta cadena de inecuaciones, resolvemos las dos inecuaciones asociadas

$$\textbf{Inecuación 1} \; : \; -1\leq\frac{x-3}{x^2+1} \qquad \text{y} \qquad \textbf{Inecuación 2} \; : \; \frac{x-3}{x^2+1}\leq 1$$

y se intersectan las soluciones.

Observemos que al resolver la **Condición 2** se resuelve, de manera indirecta, la **Condición 3**

Se resuelven las dos inecuaciones

i. **Inecuación 1** : $-1\leq\dfrac{x-3}{x^2+1}$.

$$-1\leq\frac{x-3}{x^2+1} \implies 0\leq\frac{x-3}{x^2+1}+1 \implies 0\leq\frac{x-3+x^2+1}{x^2+1}$$

$$\implies 0\leq\frac{x^2+x-2}{x^2+1} \implies 0\leq\frac{\left(x-1\right)\left(x+2\right)}{x^2+1}.$$

Así, resolver la inecuación

$$-1\leq\frac{x-3}{x^2+1} \qquad \text{es equivalente a resolver} \qquad 0\leq\frac{\left(x-1\right)\left(x+2\right)}{x^2+1}.$$

Por lo tanto, buscamos los números reales, x, que hacen que la expresión sea positiva o igual a cero.

Buscamos los **puntos extremos** de la expresión, para ello igualamos a cero

A. Numerador : $\left(x-1\right)\left(x+2\right)=0 \iff \begin{cases} x-1=0 \implies \boldsymbol{x=1}. \\ x+2=0 \implies \boldsymbol{x=-2}. \end{cases}$.

B. Denominador : $x^2+1=0$. Observemos que x^2+1 siempre es mayor a cero para todo $x\in\mathbb{R}$, por ser la suma de dos términos positivos, así, que x^2+1 nunca es igual a cero.

Estudiamos el signo de $\dfrac{(x-1)(x+2)}{x^2+1}$. (Recuerde, buscamos los valores donde la expresión es positiva o igual a cero)

	$-\infty$ a -2	-2 a 1	1 a $+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
x^2+1	$+$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$

Luego, la solución de la inecuación es $x \in \left(-\infty, -2\right] \bigcup \left[1, +\infty\right)$.

ii. **Inecuación 2** : $\dfrac{x-3}{x^2+1} \leq 1$.

$$\frac{x-3}{x^2+1} \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x-3}{x^2+1} - 1 \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x-3-\left(x^2+1\right)}{x^2+1} \leq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{x-3-x^2-1}{x^2+1} \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{-x^2+x-4}{x^2+1} \leq 0.$$

Factorizamos el numerador, para ello aplicamos la resolvente para $a = -1$, $b = 1$ y $c = -4$

$$x = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4(-1)(-4)}}{2(-1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{-1-16}}{-2} = \frac{\pm \sqrt{-17}}{-2} \longleftarrow \boxed{\text{Raíz cuadrada de un número negativo. Número complejo.}}$$

por lo que, el polinomio del numerador es irreducible, es decir, no tiene raíces reales.

Así, resolver la inecuación

$$\frac{x-3}{x^2+1} \leq 1 \qquad \text{es equivalente a resolver} \qquad \frac{-x^2+x-4}{x^2+1} \leq 0.$$

Por lo tanto, buscamos los números reales, x, que hacen que la expresión sea negativa o igual a cero.

Como los polinomios del numerador y denominador son irreducible, no hay **puntos extremos**.

Estudiamos el signo de $\dfrac{-x^2+x-4}{x^2+1}$. (Recuerde, buscamos los valores donde la expresión es negativa o igual a cero)

	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$-x^2+x-4$	$-$
x^2+1	$+$
	$-$

Luego, la solución de la inecuación es $x \in \mathbb{R}$.

Luego, la solución de la inecuación $\left|\dfrac{x-3}{x^2+1}\right| \leq 1$ es

$$\textbf{sol}_2 \;:\; = \left\{\left(-\infty,-2\right]\bigcup\left[1,+\infty\right)\right\}\bigcap\mathbb{R} = \left(-\infty,-2\right]\bigcup\left[1,+\infty\right).$$

Entonces

$$\textbf{sol}_2 \;:\; x \in \left(-\infty,-2\right]\bigcup\left[1,+\infty\right).$$

El dominio de la función f viene dado por

$$\operatorname{Dom} f : \textbf{sol}_1 \bigcap \textbf{sol}_2 = \left\{\left(-\infty,0\right]\bigcup\left\{1,3\right\}\right\}\bigcap\left\{\left(-\infty,-2\right]\bigcup\left[1,+\infty\right)\right\} = \left(-\infty,-2\right]\bigcup\left\{1,3\right\}.$$

Luego

$$\operatorname{Dom} f : \left(-\infty,-2\right]\bigcup\left\{1,3\right\}.$$

★

4. $\left[\text{TOTAL 4 puntos}\right]$ Suponga que la función real definida por $f(x) = 3-2x^3$ es invertible

(a) $\left[\text{3 puntos}\right]$ Determine la inversa de f.

Solución : Puesto que, la función f es inyectiva, entonces concluimos que admite inversa, es decir, f^{-1} existe.

Hallamos dicha inversa, para ello despejamos la variable x de la expresión $y = 3-2x^3$

$$y = 3-2x^3 \quad\Longleftrightarrow\quad 2x^3 = 3-y \quad\Longleftrightarrow\quad x^3 = \frac{3-y}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad x = \sqrt[3]{\frac{3-y}{2}}.$$

Entonces

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{3-x}{2}}.$$

★

(b) $\left[1 \text{ punto}\right]$ Halle $f^{-1}\left(f\left(4\right)\right)$.

Solución : Es conocido que

$$f^{-1}\left(f\left(x\right)\right) = x,$$

así,

$$f^{-1}\left(f\left(4\right)\right) = 4.$$

★

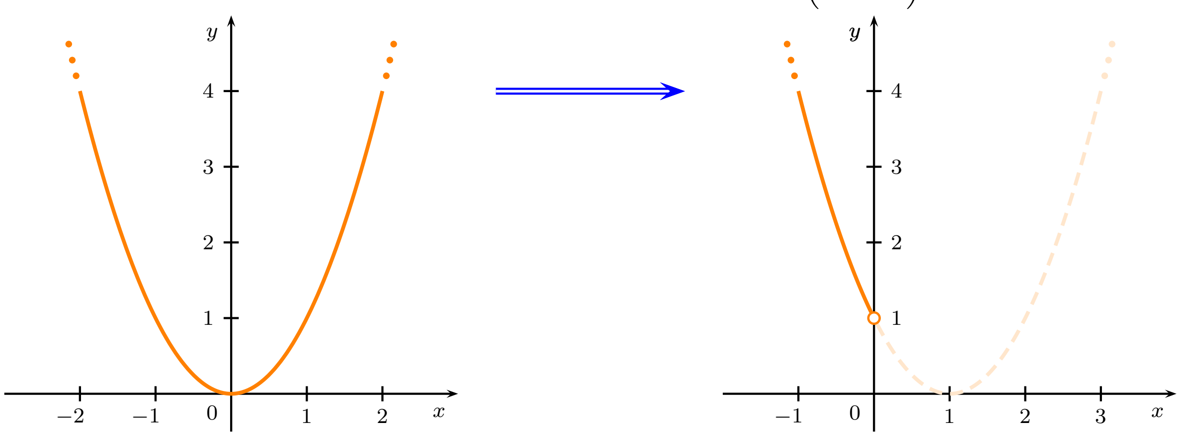
5. $\left[\text{TOTAL } 6 \text{ puntos}\right]$ Considere las funciones

$$g\left(x\right) = \begin{cases} \left(x-1\right)^2 & \text{si } x < 0 \\ 1 + \left|1-x\right| & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad h\left(x\right) = \sqrt{3-x}.$$

(a) $\left[2 \text{ puntos}\right]$ Bosqueje la gráfica de g y la gráfica de h.

Solución : Realizamos la representación gráfica de la función a trozos g, para ello graficamos, en primer lugar, la función $y = \left(x-1\right)^2$ sobre el dominio restringido $\left(-\infty, 0\right)$

Se traslada, horizontalmente, la gráfica de la función básica $y = x^2$ una unidad a la derecha y restringimos el dominio a $\left(-\infty, 0\right)$



Gráfica de la función básica **Gráfica de la función transformada**

A continuación hacemos la representación gráfica de la función $y = 1 + \left|1-x\right|$ sobre el dominio restringido $\left(1, 2\right]$.

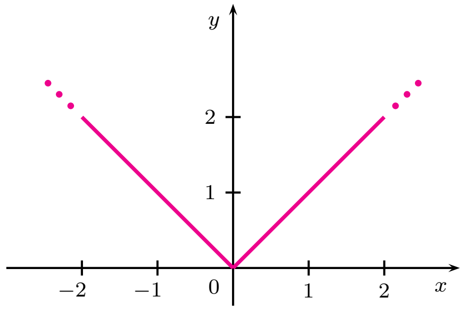
Observemos que

$$\left|1-x\right| = \left|\left(-1\right)\left(-1+x\right)\right| = \left|-1\right|\left|x-1\right| = \left|x-1\right|,$$

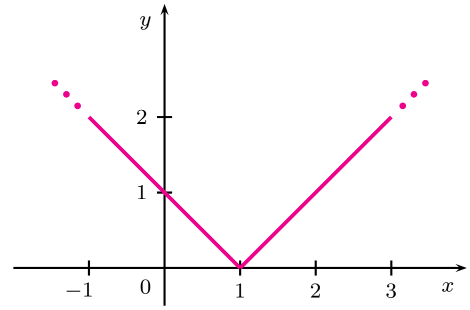
por lo que, la función básica es $y = \left|x\right|$.

Para obtener la gráfica de $y = 1 + \left|1 - x\right|,$ se traslada horizontalmente una unidad a la derecha a la gráfica de la función básica, luego se traslada, verticalmente, una unidad hacia arriba.

Se traslada, horizontalmente, la gráfica de la función básica $y = \left|x\right|$ una unidad a la derecha y se obtiene la gráfica $y = \left|x - 1\right|$

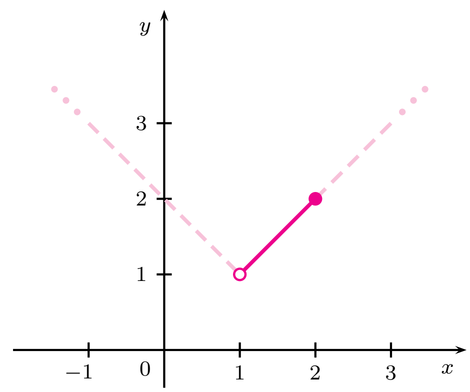


Gráfica de la función básica



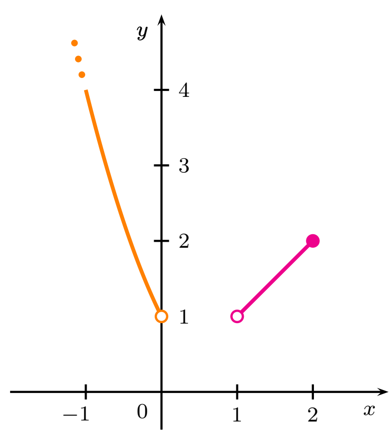
Gráfica de la función transformada

Se traslada, verticalmente, la gráfica de la función $y = \left|x - 1\right|$ una unidad hacia arriba y restringimos el dominio a $\left(1, 2\right]$



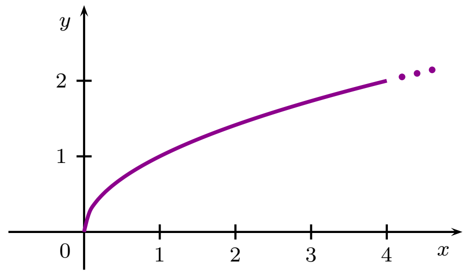
Gráfica de la función transformada

Finalmente, la representación gráfica de la función g es



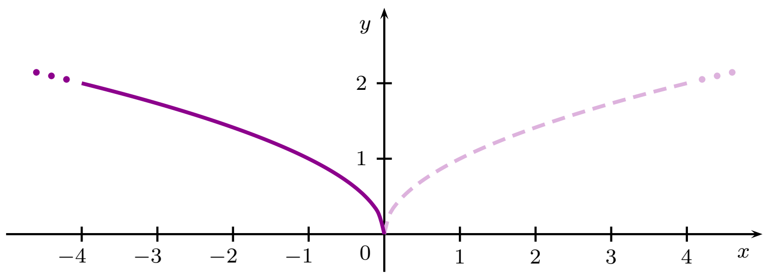
Gráfica de la función g

Realizamos, ahora, la representación gráfica de la función $h(x) = \sqrt{3-x}$, para ello, consideramos la función básica $y = \sqrt{x}$, realizamos un reflejo con respecto al eje y para obtener $y = \sqrt{-x}$ y finalmente, trasladamos, horizontalmente, tres unidades a la derecha y se obtiene la representación gráfica de h.



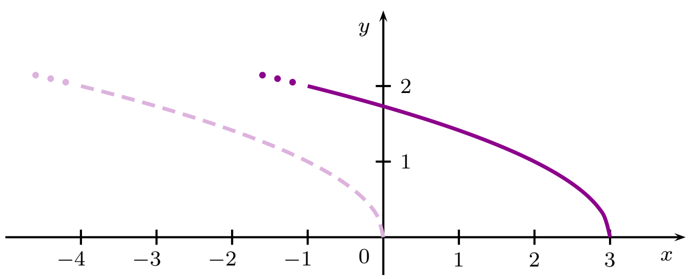
Gráfica de la función básica

Se refleja respecto al eje y para obtener $y = \sqrt{-x}$



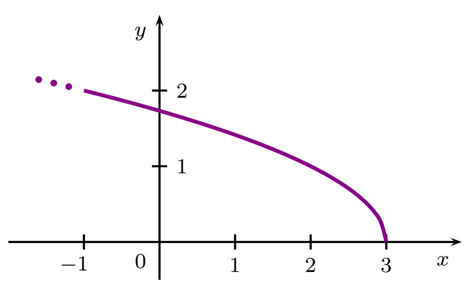
Gráfica de la función transformada

Se traslada, horizontalmente tres unidades a la derecha



Gráfica de la función transformada

Así, la representación gráfica de h es



Gráfica de la función h

★

(b) $\left[4 \text{ puntos}\right]$ Determine, si es posible, $g \circ h$. En caso afirmativo, obtenga su regla de correspondencia y su dominio.

Solución : Para que la composición $g \circ h$ se pueda realizar se debe tener que

$$\operatorname{Rgo} h \bigcap \operatorname{Dom} g \neq \varnothing.$$

De las representaciones gráficas obtenidas en el item 5a, tenemos

$$\operatorname{Rgo} h : \Big[0, +\infty\Big) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Dom} g : \Big(-\infty, 0\Big) \bigcup \Big(1, 2\Big].$$

Así,

$$\operatorname{Rgo} h \bigcap \operatorname{Dom} g = \Big[0, +\infty\Big) \bigcap \Big\{\Big(-\infty, 0\Big) \bigcup \Big(1, 2\Big]\Big\} = \Big(1, 2\Big] \neq \varnothing.$$

Por lo tanto, la composición $g \circ h$ se pueda realizar y su regla de correspondencia viene dada por

$$\Big(g \circ h\Big)(x) = 1 + \Big|1 - \sqrt{3 - x}\Big|.$$

Hallamos el dominio de $g \circ h$

$$1 < \sqrt{3 - x} \leq 2 \iff 1^2 < 3 - x \leq 2^2 \iff 1 < 3 - x \leq 4$$
$$\iff -2 < -x \leq 1 \iff 2 > x \geq -1.$$

De aquí, $x \in \Big[-1, 2\Big)$. Entonces

$$\operatorname{Dom} g \circ h = \Big[-1, 2\Big) \bigcap \operatorname{Dom} h = \Big[-1, 2\Big) \bigcap \Big(-\infty, 3\Big] = \Big[-1, 2\Big).$$

Luego $\operatorname{Dom} g \circ h : \Big[-1, 2\Big)$. ★